УДК 378.1

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЕКОЛОГІЧНОГО ЗМІСТУ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Г.О. Козлакова
доктор педагогічних наук, професор,
С.П. Цецик
асистент кафедри вищої математики,
Національного університету водного господарства і природокористування

Розглядаються особливості розв'язання прикладних задач екологічного змісту з використанням елементів математичного моделювання. Обґрунтовується важливість їх введення до курсу вищої математики, що викладається для майбутніх фахівців-екологів з метою їх професійної орієнтації.

Ключові слова: математизація, прикладні задачі екологічного змісту.

Сучасний процес математизації знань, а також складність і багатогранність взаємозв'язків об'єктів екології зумовлюють інтенсивний розвиток математичного моделювання природних явищ і процесів. Тому інгредієнтом підготовки у вищій школі спеціаліста в галузі екології та охорони навколишнього середовища є навчання його володінню математичними методами і методами математичного моделювання. А це вимагає надання курсу вищої математики, що викладається для студентів-екологів, професійної спрямованості. Одним із шляхів досягнення цієї мети є введення у загальний курс вищої математики прикладних задач з побудови математичних моделей певних природних явищ, процесів.

У науково-методичній літературі [*2; 3; 8*] дослідники звертають увагу на те, що викладання курсу вищої математики для студентів нематематичних спеціальностей обов'язково повинно мати прикладний характер, розвивати в майбутніх фахівців навички застосування набутих знань до розв'язання задач професійного змісту.

Загальновідомо, що саме математика є тим фундаментом, науковим підґрунтям, на якому у вищій школі будується спеціальна підготовка майбутніх фахівців. На думку Б.В.Гнеденко, усвідомити це студенти зможуть лише за умови, якщо їм буде неодноразово і переконливо продемонстровано, підґрунтям чого вона стає. Необхідно на численних прикладах ілюструвати, як і чому математичні методи дозволяють розв'язувати задачі практики і які практичні задачі обов'язково зводяться до необхідності подальшого розвитку самої науки та її методів [*2*].

Науковці А.Д.Мишкіс і Б.О.Солоноуц [*8*], розглядаючи проблеми, що існували й продовжують існувати в методиці викладання вищої математики, вказують на суттєве протиріччя між добре відпрацьованою формою практичних занять та їх змістом, який майже не враховує сучасних тенденцій і вимог спеціальності. Студентам доволі часто пропонуються задачі небагатьох формальних типів, що вже втратили своє прикладне значення або пов'язані із безпосередньою підстановкою у формули. Проте, саму думку про відмову від формальних задач вчені відкидають, пропонуючи дозоване їх використання. При цьому вони наголошують, що формальні обчислення мають поєднуватися із вправами, що імітують етапи реального дослідження хоча би у спрощеному вигляді. Тобто постановка задачі та її спрямованість мають нагадувати те, що може виникнути у реальному прикладному дослідженні.

Серед наукових праць з проблем впровадження методів математичного моделювання в курс вищої математики слід виділити праці В.Г.Скатецького [*10*] і Т.В.Крилової [*3*]. У своїй роботі "Проблеми навчання математики в технічному вузі" професор Т.В.Крилова відмічає, що навчання вмінню будувати математичні моделі природних процесів є одним з першочергових завдань у системі освіти тих спеціалістів, які використовують методи математичного моделювання у своїй роботі [*3*].

Беручи до уваги дослідження названих науковців, а також враховуючи вимоги до професійної підготовки спеціалістів у галузі екології та охорони навколишнього середовища, можна сформулювати такі дидактичні положення про необхідність надання професійної спрямованості курсу вищої математики:

- подолання формально-логічного викладення матеріалу і надання абстрактним математичним поняттям і задачам конкретного змісту;

- забезпечення органічної єдності екологічних понять з умовами математичних задач;
- ознайомлення студентів з методами математичного моделювання як необхідним елементом професійної підготовки;
- розвиток професійно-прикладного математичного мислення студентів (відпрацювання навичок постановки і розв'язання прикладних задач за допомогою математичних методів);
- забезпечення мотивації вивчення курсу вищої математики як необхідного психологічного фактора, що сприятиме підвищенню інтересу до вивчення предмета.

На даний час в екологічних дослідженнях найбільш важливими є два типи знакових моделей: математичні (аналітичні) та імітаційні (системні).

Зауважимо, що під моделлю будемо розуміти зображення (уявлення, поняття) об'єкта, процесу або системи в деякій формі, яка відмінна від форми їх реального існування [5].

Процес побудови математичної моделі включає у себе низку етапів, який схематично можна представити так [5]:

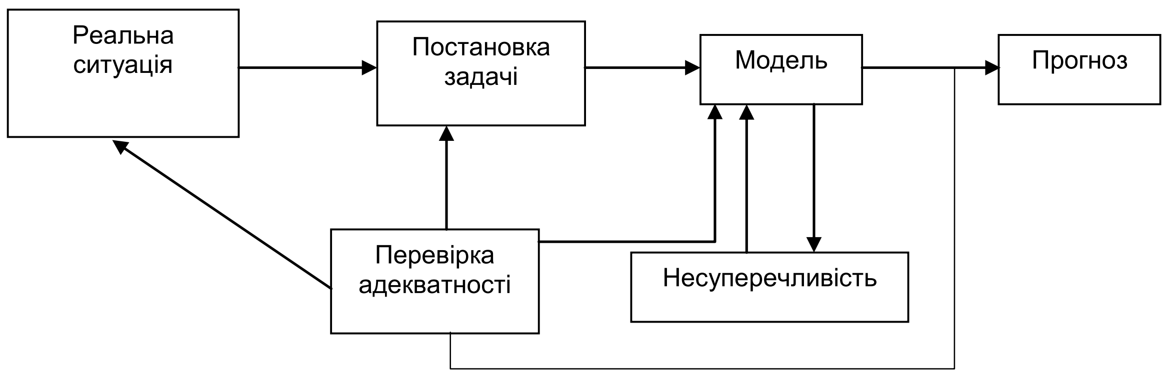

Рис.1. Блок-схема побудови математичної моделі

Кожен з етапів процесу є трудомістким і довготривалим. На його перебіг впливають такі чинники, як повнота інформації про досліджуваний процес чи об'єкт, мета й завдання моделювання, творчий потенціал науковця, його інтуїція, досвід, володіння математичними методами тощо.

Моделі можуть відрізнятися за ступенем їх адекватності, точності і загальності. Адекватність математичної моделі – це рівень відповідності її математичних посилань і результатів до існуючих реальних (фізичних, біологічних) уявлень про досліджуваний об'єкт, явище, процес тощо. Точність моделі – це її здатність кількісно відтворювати ті дані, на яких її побудовано, та можливість передбачати майбутні зміни. Узагальненість моделі – це діапазон різних ситуацій, до яких її можна застосовувати [6].

Якість математичної моделі, можливість її практичного використання залежить від ступеня її адекватності реальній системі, яку вона описує. Цей етап перевірки ґрунтується на використанні чисельного моделювання на ЕОМ. Крім цього, кожна екологічна модель проходить обов'язковий процес верифікації, який полягає у визначенні числових значень невідомих параметрів моделі [5]. Такі величини називаються детермінованими.

Математична модель може містити й інший клас величин, які називаються стохастичними. Вони ніколи не можуть бути точно виміряні і носять випадковий характер [7]. Тому на початку побудови математичної моделі дуже важливо правильно встановити природу величин, що розглядаються.

Суть імітаційного моделювання полягає у тому, що модель реальної системи будується спочатку словесно (вербальна), а потім залучаються всі існуючі методи до формалізації і математичного опису моделі, включаючи методи інформатики, системного аналізу і математичного моделювання. Відмінність імітаційної моделі від строго математичної полягає у неповноті математичного опису реального об'єкта першої [5]. І якщо традиційні напрями математичного моделювання зорієнтовані переважно на якісне вивчення природних явищ, процесів, то в імітаційному моделюванні звертається увага на їх кількісні зміни.

У роботі [5] висловлюється думка про те, що протиставлення математичного та імітаційного моделювання позбавлене всякого ґрунту. Більше того, ці методи повинні об'єднуватися, доповнювати один одного, даючи можливість досліджувати складні екологічні системи.

Таким чином, враховуючи значні витрати часу на побудову наукової математичної моделі, а також той факт, що студенти ще не мають відповідних екологічних знань зі спеціальних дисциплін, не володіють методами програмування на ЕОМ (курс „Інформатика та програмування” читається паралельно з курсом “Вища математика”), впровадження в загальний курс вищої математики методів математичного моделювання у широкому сенсі – справа не реальна. Тому студентів можна лише ознайомити з вихідними положеннями математичного моделювання та його основами [*3*].

У процесі навчання основам математичного моделювання можна керуватися методикою, що відповідає таким принципам [*3*]:

- принципу професійної відповідності (вибір об’єкта, що вивчається у даній спеціальності, та його математичне моделювання);
- принципу наступності (обраний об’єкт, для якого будується математична модель, набуває подальшого розвитку і досліджується у спеціальних дисциплінах;
- принципу обґрунтованості (вибір відомих фактів, на яких базується побудова математичної моделі, зі спеціальних дисциплін, які вивчаються на старших курсах);
- принципу конструювання або побудови моделі (визначення відповідності між об’єктом, що вивчається, та його математичним уявленням);
- принципу адекватності (набуття моделлю визначеного змісту і розв’язання при цьому поставленої задачі);
- принципу стійкості (набуття математичною моделлю конкретного вигляду з фіксованими значеннями параметрів, що входять до неї).

Як бачимо, успіх навчання майбутніх екологів основам математичного моделювання значною мірою залежить від вибору матеріалу – прикладних задач. Це можуть бути як класичні приклади з підручника В.П.Кучерявого „Екологія” [*4*], так і з фахових дисциплін. Уводити задачі потрібно в послідовності, що відповідає діючій робочій програмі курсу вищої математики, при цьому важливо не порушувати логічну структуру предмета. У такому разі виникає потреба у веденні студентами словника екологічних термінів, адже інколи застосування екологічних понять у математиці передує його вивченню у спеціальних предметах.

Важливо, щоби кожна прикладна задача відповідала таким вимогам:

- має бути доступною для студентів (спиратися на вже відомі математичні твердження);
- не містити складних або громіздких обчислень;
- розрахована на незначні витрати часу.

Ці вимоги зумовлені тим, що на практичному занятті з вищої математики потрібно закріпити теоретичний матеріал, що його студенти прослухали на лекціях, та відпрацювати навички розв’язання типових задач. А це в умовах скорочення аудиторних годин зробити непросто.

Відмітимо, що у прикладних задачах невідомі, дані, умови, поняття, необхідні попередні знання – все складніше і менше визначені, ніж у чисто математичних задачах. Це головна відмінність і вона тягне за собою інші відмінності. Але основні мотиви і методи розв’язання є спільними для обох типів задач [*9*].

Розв’язання прикладної задачі з елементами математичного моделювання включає три основні етапи, які становлять загальну основу застосувань математичних методів до розв’язання прикладних проблем [*3; 5; 9*].

І етап. Формалізація (аналіз і побудова математичної моделі). На даному етапі слід перейти від реальної екологічної ситуації, яку потрібно розв’язати, до її формальної моделі. Для цього спочатку необхідно визначити і чітко окреслити об’єкт (процес, явище) дослідження. Такий процес виділення задачі, що підлягає математичному аналізу, часто буває довготривалим. Це зумовлено тим, що кожен об’єкт (процес, явище) є невичерпні у своїх властивостях і відносинах (зв’язках).

Кожна математична модель будується тільки за допомогою певних строго визначених кількісно величин, які у процесі дослідження можуть змінюватися або залишаються незмінними (константами), а тому на етапі формалізації виділяються такі моменти:

- об’єкт дослідження розбивається на елементи (компоненти), які характеризують найістотніші властивості даного об’єкта (процесу, явища), а також відповідають поставленій меті й конкретним умовам;
- кожному елементу ставиться у відповідність деяка кількісна величина (екологічні твердження виражаються за допомогою математичних символів); утворюється абстрактна система взаємопов’язаних елементів (компонентів);
- аналізується повнота даних утвореної системи;
- виділяються основні зв’язки між окремими елементами системи та між елементами системи і середовищем, у якому функціонує дана система. При

цьому використовуються аналітичні методи (апарат математичного аналізу та інші розділи математики), комбінаторний аналіз, методи математичної статистики, методи побудови емпіричних формул (саме цей момент дає можливість продемонструвати студентам важливе досягнення математики – згортання інформації, тобто представлення її в компактній формі: у вигляді рівнянь, систем рівнянь тощо);

- перевіряється несуперечливість побудованої математичної моделі (вона має підпорядковуватися усім законам математичної логіки).

На етапі формалізації важливо також звертати увагу на абстрактну природу побудованої математичної моделі. Тобто показувати на прикладах, яким чином із загальних математичних моделей, що описують широкий клас явищ і процесів, можна вивести (одержати) часткові математичні моделі, які описують конкретні, вужчі сукупності явищ. Таким чином будуються моделі різних рівнів, причому кожна модель нижчого рівня має бути погоджена з моделлю вищого рівня і не повинна їй суперечити [5].

Наприклад, із диференціального рівняння $\frac{dx}{dt}$ = =*kx+b*, де *k, b – const,* можна отримати математичні структури, що описують явища різної природи (рис.2).

Універсальність математичних моделей дозволяє широко використовувати метод математичних аналогій. Розкриття цього факту студентами розвиває в них вміння переходити від часткових випадків – до загальних, від простих - до складних.

На початковому етапі навчання студентів методам математичного моделювання не варто ставити за мету реалізацію всіх моментів етапу формалізації, оскільки це пов’язано, з одного боку, зі значними витратами часу, а з іншого – з психологічним фактором (студенти-першокурсники ще не готові до наукової роботи).

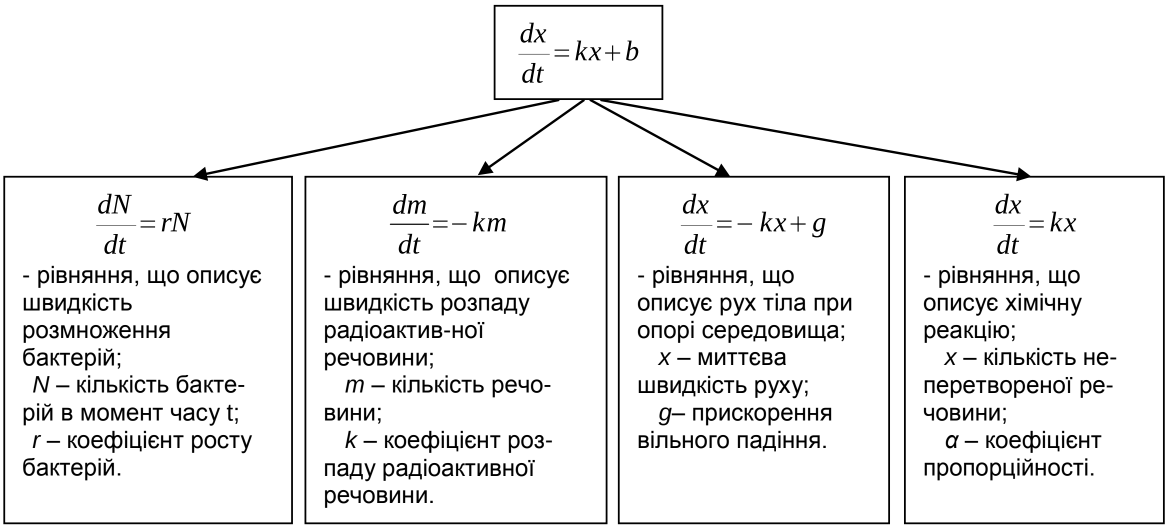

Рис.2. Абстрактна природа математичної моделі $\frac{dx}{dt}=kx+b$.

Тому кожен із згаданих моментів вводиться поступово, враховуючи специфіку самої задачі.

Так, насамперед потрібно навчити студентів ставитися до тексту математичної задачі як до результату моделювання реальної екологічної ситуації, де вже відкинуто все другорядне і залишено головні, найістотніші властивості об’єкта (процесу, явища), які підлягають математичному аналізу.

Для цього студенти вивчають умову задачі і намагаються самостійно відновити другорядні, не суттєві з математичного погляду обставини, властивості об’єкта, що можуть виникнути в реальній ситуації.

Пізніше, коли студенти набули певного досвіду з даного питання, можна вводити прикладні задачі, які вимагають “мислено виокремити й перетворити в самостійний об’єкт окремі властивості, елементи або стани предмета” [8]. Такий процес у філософії і психології носить назву абстрагування і є одним із основних процесів розумової діяльності.

У психології розрізняють три види абстракції [3; 11]:

- *ізолююча абстракція*, що полягає у виділенні окремого елемента серед інших;
- *підкреслююча абстракція*, що полягає не тільки у виділенні основного елемента, але й у зазначенні інших елементів, що створюють фон для виділеного елемента;

- *протиставляюча абстракція*, що полягає у свідомому розщепленні суттєвого та несуттєвого.

Розв'язання прикладних задач з елементами математичного моделювання сприяє розвиткові різних видів абстрактного мислення студентів.

II етап. Знаходження методу розв'язання математичної задачі, що пов'язана з моделлю. На цьому етапі студенти вчаться використовувати вивчені математичні методи до розв'язання поставленої математичної задачі. Шукають і розробляють свій метод розв'язання, якщо стандартний – не є раціональним; розбивають складні задачі на простіші підзадачі. Коли знайдено метод розв'язання задачі, складається план її розв'язання. Після його реалізації дуже важливо провести математичне дослідження результатів розв'язання задачі. Адже головна мета моделювання реальних явищ (процесів) полягає у необхідності передбачити нові результати або нові властивості явищ.

III етап. Інтерпретація результатів або надання одержаному математичному результату реального змісту та перевірка особливостей розв'язку задачі. Етап інтерпретації вимагає повернення до поставленої екологічної проблеми.

При цьому потрібно:

- перевірити відповідність отриманих результатів розв'язку задачі до екологічної ситуації, що розглядається;
- вміти перейти від отриманих загальних тверджень до часткових;
- оцінити значення отриманого результату.

Зауважимо, що даний етап в курсі вищої математики часто матиме спрощений, ілюстративний характер.

Процес моделювання прикладної задачі можна представити у вигляді блок-схеми (рис.3), за основу побудови якої взято відповідні блок-схеми, подані у роботах [*3*] і [*9*].

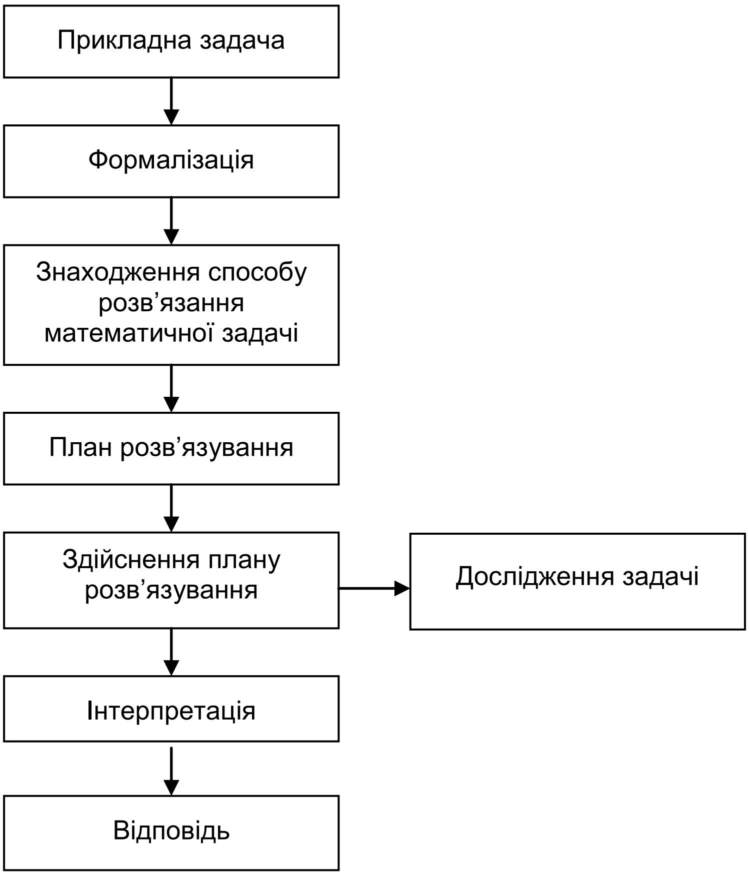

Рис.3. Блок-схема процесу моделювання

Наведемо приклад. У сприятливих умовах знаходиться деяка популяція бактерій N_0. З експериментальних досліджень відомо, що швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості. Знайти закон зміни кількості бактерій із часом.

Розв'язання. 1.З умови задачі визначаємо, яка змінна виконує роль функції, а яка змінна – її аргумент. Кількість бактерій *N* приймемо за функцію, а час *t* – за аргумент. Тоді $N=f(t)$ – шукана функція.

2.Встановлюємо зміст похідної шуканої функції. З диференціального числення відомо, що швидкість розмноження бактерій у деякий момент часу визначається $\frac{dN}{dt}$.

3.Знайдемо залежність між шуканою функцією, її аргументом і похідною.

За умовою задачі $\frac{dN}{dt}$ ~ N => $\frac{dN}{dt} = kN$, (1)

де k – коефіцієнт росту бактерій.

Отже, маємо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = kN, \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2)$$

Розв'яжемо задачу (2). Знайдемо загальний розв'язок задачі (2) (принцип адекватності).

У рівнянні $\frac{dN}{dt} = kN$ відокремимо змінні і проінтегруємо його, тоді маємо $N = c\ e^{rt}$ (3)

- загальний розв'язок рівняння (1).

Для знаходження сталої c використаємо початкову умову $N(0) = N_0$: $c = N_0$.

Тоді $N = N_0\ e^{rt}$ (4)

- частинний розв'язок рівняння (1).

Розв'язок (4) рівняння (1) являє собою формулу експоненціального росту популяції бактерій. Якщо $r>0$, то популяція з плином часу зростає; якщо $r=0$ – залишається на постійному рівні $N(t) = N(0) = N_0$; якщо $r<0$ – зменшується, прямуючи до нуля (гине). Ці випадки покажемо на рис.4.

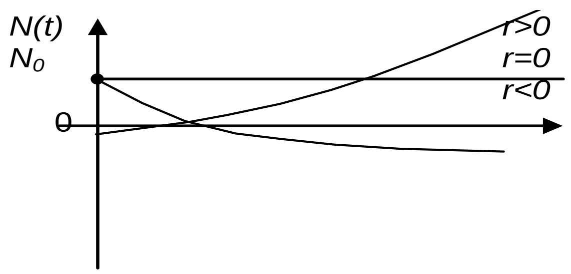

Рис.4. Ілюстрація розв'язків рівняння (1).

Зауважимо, що (1) є найпростішою математичною моделлю, яка використовується для вивчення кількісної оцінки розвитку природних популяцій, даючи достовірні результати лише на початковому етапі розвитку останньої.

Математична модель (1) отримує подальшого розвитку у спеціальних дисциплінах, що вивчаються студентами на старших курсах при вивченні проблем обробки стічних вод, вивченні методів боротьби з комахами-шкідниками тощо, тобто маємо реалізацію принципу наступності навчання.

Можна навести інші приклади дії даної математичної моделі у природі: розмноження клітин дріжджів, "цвітіння" води у водоймищах, вибух чисельності шкідників тощо. Отже, прикладні задачі, що відповідають професійному інтересу майбутніх спеціалістів, допомагають розкрити сутність математичних понять, зблизити теорію і практику, а головне – формувати у студентів відчуття значущості, важливості математичних методів, що слугуватимуть підґрунтям подальшої успішної професійній діяльності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Большой психологический словарь* // Сост. и ред. Б.Мещеряков, В.Зінченко. – СПб.: Прайн–ЕРОЗНАК, 2003. – 672 с.
2. *Гнеденко Б.В.* О специальных курсах естественно-научного и прикладного характера // Сб. научно-метод. статей. – М.: Высшая школа,1988. – Вып.15.– С.4-9.
3. *Крилова Т.В.* Проблеми навчання математики в технічному вузі. – К.: Вища школа, 1998. – 438 с.
4. *Кучерявий В.П.* Екологія. – Львів: Світ, 2001. – 500 с.
5. *Лаврік В.І.* Методи математичного моделювання в екології. – К.: Фітосоціоцентр, 1996. – 132 с.
6. *Мак-Лоун Р.Р.* Математическое моделирование – искусство применения математики // Математическое моделирование / Ред. Дж.Эндрюс, Р.Мак-Лоун. – М.: Мир, 1979. – 279 с.
7. *Логофет Д.О.* Что такое математическая экология? // Математические модели в экологии и генетике. – М.: Наука, 1981. – С.8-17.

8. *Мышкис А.Д., Солоноуц Б.О.* О программе и стилях преподавания математики в вузах // Сб. научно-метод. статей. – М.: Высшая школа, 1973. – Вып. 3. – С. 3-12.
9. *Пойа Д.* Как решать задачу. – Львов: Квантор, 1991. – 215 с.
10. *Скатецкий В.Г.* Математическое моделирование физико-химических процессов. – Минск: Высшая школа, 1981. – 141 с.
11. *Слепкань З.И.* Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Радянська школа, 1983. – 192 с.

Стаття надійшла до редакції 23.03.2007 р.